РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ХИМИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

МОСКВА

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ХИМИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ, 2001, том 35, № 4, с. 372–376

УДК 66.067.12

РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТА ОТФИЛЬТРОВЫВАНИЯ И ГИДРАВЛИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ВОЛОКНИСТОЙ ФИЛЬТРОВАЛЬНОЙ ПЕРЕГОРОДКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗМЕРНОСТИ ХАУСДОРФА–БЕЗИКОВИЧА

© 2001 г. Ф. Ф. Чаусов*, Ю. Н. Германов**

**Удмуртский государственный университет, г. Ижевск*

***Тверской государственный университет*

Поступила в редакцию 21.07.99 г.

Рассматривается вопрос о расчете коэффициента отфильтровывания и гидравлического сопротивления фильтровальных перегородок, построенных из волокон, размеры (длина и диаметр) которых убывают в геометрической прогрессии. Установлено, что указанные параметры связаны с размерностью Хаусдорфа–Безиковича и оказываются оптимальными, когда фильтровальная перегородка имеет фрактальную структуру.

Для оптимизации процессов фильтрования необходимо знать зависимости между структурными параметрами и эксплуатационными показателями фильтровальных перегородок. Для некоторых фильтровальных перегородок такие зависимости известны [1, 2], однако расчеты с их помощью достаточно громоздки и требуют информации о статистическом распределении размеров пор фильтровальных перегородок и частиц загрязнений фильтруемой среды, а значит необходимо проводить экспериментальные исследования. Таким образом, возникает необходимость хотя бы приблизительно оценить основные эксплуатационные показатели (коэффициент отфильтровывания и гидравлическое сопротивление) на основе более общих параметров структуры фильтровальных перегородок.

В настоящей работе устанавливается связь между размерностью Хаусдорфа–Безиковича [3] и коэффициентом отфильтровывания и гидравлическим сопротивлением фильтровальных перегородок, построенных из волокон, размеры (длина и диаметр) которых убывают в геометрической прогрессии.

Размерность Хаусдорфа–Безиковича $D_\rho(S)$ множества S в метризуемом пространстве T с метрикой ρ определяется как

$$D_\rho = \sup_{\lambda_{\alpha,\rho}(S) = \infty} \alpha,$$

где

$$\lambda_{\alpha,\rho}(S) = \lim_{\substack{\max \delta(A_i) \to 0 \\ A_i \in \mathbf{A}}} \inf_{\mathbf{A}} \left[\sum_{A_i \in \mathbf{A}} \delta(A_i)^\alpha \right]$$

– α-мера Хаусдорфа множества S в метрике ρ; $\mathbf{A} = \{A_i\}$ – счетное покрытие множества S открытыми шарами $A_i \in T$; $\delta(A_i)$ – диаметр шара A_i в метрике ρ; нижняя грань берется по всем возможным счетным покрытиям **A**. В частности, показано [3], что размерность Хаусдорфа–Безиковича множества S в n-мерном евклидовом пространстве E^n, содержащего объединение $S_0 = \bigcup_{j=1}^{K} \Sigma K$ множеств Σ $(1 < K < \infty)$, удовлетворяющих преобразованию подобия $\Psi_r : S \longrightarrow \Sigma$ с коэффициентом подобия r $(0 < r < 1)$, определяется выражением $D(S) = -\ln K/\ln r$.

Множество S, для которого $D(S) > \dim S$ ($\dim S$ – размерность Лебега множества S), называется фракталом [3].

Будем рассматривать фильтровальную перегородку как замкнутую связную область $Q \subset E^3$. Причем существует непустое замкнутое множество $F(Q) \subset Q$, представляющее собой объединение $F(Q) = \bigcup_j \varphi_j$ структурных элементов φ_j, из которых построена перегородка. В дальнейшем будем рассматривать множества $F(Q)$, которые представляют случайные замкнутые множества, порождаемые пуассоновскими процессами [4], волокон φ_j в Q с интенсивностью λ $(\lambda > 0)$. Волокно φ_j будем рассматривать как прямой круговой цилиндр диаметром d $(d < \infty)$ и высотой l $(l < \infty)$ $(d \ll l)$, ориентированный в пространстве случайно с изометрической диаграммой направленности.

Рассмотрим фильтровальную перегородку $Q_N = \bigcup_{i=0}^{N} q_i$, где q_i – i-й слой – замкнутая плоскопараллельная пластина в E^3, имеющая толщину h_i $(h_i < \infty)$ в направлении, параллельном направлению линий тока фильтруемой среды, и безграничная в перпендикулярных направлениях. При $i \neq j$ имеем $q_i \cap q_j = \theta q_i \cap \theta q_j$, а случайное замкнутое множество $f_i = F(q_i)$ порождено пуассоновским процессом волокон φ_{ji} диаметром d_i и длиной l_i, имеющим интенсивность λ_i. Причем параметры λ_i, d_i, l_i и h_i при $i = 1, 2, \ldots, N$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= K\lambda_{i-1}, \quad d_i = rd_{i-1}, \\ l_i &= rl_{i-1}, \quad h_i = rh_{i-1} \end{aligned} \tag{1}$$

или, что эквивалентно,

$$\lambda_i = K^i\lambda_0, \quad l_i = r^i l_0, \quad d_i = r^i d_0, \quad h_i = r^i h_0, \tag{2}$$

где K – коэффициент кратности $(1 < K < \infty)$; r – коэффициент подобия $(0 < r < 1)$; λ_0, l_0, d_0, h_0 – заранее заданные значения соответственно λ_i, l_i, d_i, h_i при $i = 0$.

Рассмотрим эксплуатационные показатели фильтровальной перегородки Q_N.

В соответствии с [5] коэффициентом отфильтровывания $\Phi(Q_N)$ называется отношение числа частиц загрязнений, задержанных фильтровальной перегородкой, к числу частиц загрязнений, содержавшихся в фильтруемой среде до ее прохождения через перегородку, в установившемся режиме фильтрования. Введем следующее определение.

Определение. Если для любой сколь угодно малой величины $\delta > 0$ существует такое конечное число N_δ, что при всяком $N > N_\delta$ для фильтровальной перегородки Q_N выполняется условие $|1 - \Phi(Q_N)| < \delta$ с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, фильтровальная перегородка Q_N называется асимптотически абсолютной.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Фильтровальная перегородка Q_N является асимптотически абсолютной тогда и только тогда, когда $Kr^2 > 1$.

Доказательство. Частица загрязнения, содержащаяся в фильтруемой среде, может пройти между волокнами $\varphi_{ji} \in f_i$ только в том случае, когда минимальный размер частицы $x_{\min}$ не превосходит линейного расстояния s между волокнами $\varphi_{ji} \in f_i$. Для случайного замкнутого множества f_i, порожденного пуассоновским процессом, s является случайной величиной, распределенной с плотностью вероятности [4]:

$$p_i(s) = \Lambda_i \exp(-\Lambda_i s), \tag{3}$$

где

$$\Lambda_i = \lambda_i \frac{\omega_2}{\omega_3} \mathrm{M} W_1(\varphi_i),$$

$$\omega_i = \frac{\pi^{i/2}}{\Gamma(1 + i/2)}$$

– объем единичного шара в E^i; М – математическое ожидание;

$$W_1(\varphi_{ji}) = \frac{\omega_3}{\omega_2} \int_{\mathfrak{R}} \nu_2[\mathrm{pr}_R(\varphi_{ji})] U(dR)$$

– функционал Минковского первого порядка в E^3; $\mathfrak{R} = \{R\}$ – множество всех плоскостей R, содержащих начало координат; ν_2 – 2-мера Лебега; $\mathrm{pr}_R(\varphi_{ji})$ – проекция φ_{ji} на плоскость $R \in \mathfrak{R}$; U – равномерное распределение на $\mathfrak{R}$.

В рассматриваемом случае

$$\Lambda_i = \frac{1}{4}\lambda_i S_i,$$

где $S_i = \nu_2(\theta\varphi_{ji})$ – площадь поверхности $\theta\varphi_{ji}$ волокна φ_{ji}; при $d_i \ll l_i$ имеем $S_i \approx \pi d_i l_i$, откуда окончательно

$$\begin{aligned} p_i(s) &= \frac{\pi d_i l_i \lambda_i}{4} \exp\left[-\frac{\pi d_i l_i \lambda_i}{4} s\right] = \\ &= \frac{\pi d_0 l_0 \lambda_0 (Kr^2)^i}{4} \exp\left[-\frac{\pi d_0 l_0 \lambda_0 (Kr^2)^i}{4} s\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

В случае если фильтрованию подвергается среда, содержащая частицы загрязнений размером $x_{\min}$, статистичсски распределенные по размерам с функцией плотности распределения $p(x_{\min})$, средняя вероятность прохождения случайно выбранной частицы между структурными элементами случайного замкнутого множества f_N не превосходит величины

$$\begin{aligned} P_N &= P(x_{\min} < s) = \int_0^\infty \int_0^s p(x_{\min}) p_N(s) dx_{\min} ds = \\ &= \int_0^\infty \int_0^s p(x_{\min}) \frac{\pi d_0 l_0 \lambda_0 (Kr^2)^N}{4} \times \\ &\times \exp\left[-\frac{\pi d_0 l_0 \lambda_0 (Kr^2)^N}{4} s\right] dx_{\min} ds. \end{aligned}$$

Таким образом, средняя вероятность прохождения случайно выбранной частицы между волокнами $\varphi_{jN} \in f_N$ стремится к нулю при неограниченном возрастании N тогда и только тогда, когда $Kr^2 > 1$.

Рассматривая процесс фильтрования как совокупность большого числа Ω испытаний, на основании закона больших чисел можно заключить, что число ω частиц, прошедших между волокнами $\varphi_{jN} \in f_N$ и тем более через всю фильтровальную перегородку Q_N в целом, стремится по вероятности к нулю при неограниченном возрастании N тогда и только тогда, когда $Kr^2 > 1$.

Поэтому в установившемся режиме (т.е. при $\Omega \longrightarrow \infty$) $|1 - \Phi(Q_N)| = \omega/\Omega$ и, следовательно, условие асимптотической абсолютности фильтровальной перегородки Q_N выполняется тогда и только тогда, когда $Kr^2 > 1$. Тем самым утверждение 1 доказано.

В силу изложенного выше, а также выкладок [6], размерность Хаусдорфа–Безиковича $D[\theta F(Q_N)]$ множества $\theta F(Q_N)$ при $N \longrightarrow \infty$ равна $D[\theta F(Q_N)] = -\ln K/\ln r$. Размерность Лебега множества $\theta F(Q_N)$ $\dim \theta F(Q_N) = 2$. Следовательно, $\theta F(Q_N)$ является фракталом тогда и только тогда, когда $-\ln K/\ln r > 2$.

Опираясь на изложенное выше, можно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 2. Фильтровальная перегородка Q_N является асимптотически абсолютной тогда и только тогда, когда $\theta F(Q_N)$ является фракталом.

Доказательство. Из утверждения 1 с учетом определения (см. выше) следует, что фильтровальная перегородка Q_N является асимптотически абсолютной тогда и только тогда, когда $N \longrightarrow \infty$ и $Kr^2 > 1$. Поскольку $N \longrightarrow \infty$, фрактальная размерность множества $\theta F(Q_N)$ равна $D[\theta F(Q_N)] = -\ln K/\ln r$.

Из неравенства $Kr^2 > 1$ следует, что $\ln K + 2\ln r > 0$. Учитывая, что $\ln K > 0$, а $\ln r < 0$, очевидно, $D[\theta F(Q_N)] = -\ln K/\ln r > 2$. Следовательно, $\theta F(Q_N)$ является фракталом. Обратное утверждение доказывается аналогично.

Рассмотрим другой важнейший показатель фильтровальной перегородки Q_N – гидравлическое сопротивление $\Delta P(Q_N)$. Общепринято, что при увеличении коэффициента отфильтровывания, а тем более при его неограниченном приближении к 1, гидравлическое сопротивление перегородки должно возрастать до бесконечности. Этот вывод следует из результатов работы с фильтровальными перегородками, изготовленными из таких материалов, как войлок, хлопковое волокно, минеральная вата и т.п.

В отношении фильтровальной перегородки Q_N сложившееся мнение оказывается неверным. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. Фильтровальная перегородка Q_N при $N \longrightarrow \infty$ имеет конечное гидравлическое сопротивление тогда и только тогда, когда $K^2r^5 < 1$.

Доказательство. Известно [7], что гидравлическое сопротивление слоя q_i составляет

$$\Delta P(q_i) = V\sigma\mu s_i^2 h_i \frac{(1-\varepsilon_i)^2}{\varepsilon_i^3}, \qquad (5)$$

где V – линейная скорость фильтруемой среды; σ – эмпирический коэффициент, зависящий от формы и расположения волокон перегородки; μ – коэффициент динамической вязкости фильтруемой среды; $s_i = \nu_2(\theta\varphi_{ji})/\nu_3(\varphi_{ji})$ – удельная поверхность волокон $\varphi_{ji} \in F(q_i)$; $\varepsilon_i = 1 - \nu_3[F(q_i)]/\nu_3(q_i)$ – относительная пористость слоя q_i; ν_3 – 3-мера Лебега. Легко показать, что

$$s_i = 4/d_i, \qquad (6)$$

$$\varepsilon_i = 1 - \pi\lambda_i d_i^2 l_i/4. \qquad (7)$$

Подставляя (6) и (7) в (5), получим

$$\Delta P(q_i) = V\sigma\mu\pi^2 \frac{\lambda_i^2 h_i d_i^2 l_i^2}{(1-\pi\lambda_i d_i^2 l_i/4)^3} = \qquad (8)$$
$$= V\sigma\mu\pi^2\lambda_0^2 h_0 d_0^2 l_0^2 (K^2r^5)^i \frac{1}{[1-(\pi\lambda_0 d_0^2 l_0/4)(Kr^3)^i]^3}.$$

Общее гидравлическое сопротивление перегородки Q_N составляет

$$\Delta P(Q_N) = V\sigma\mu\pi^2\lambda_0^2 h_0 d_0^2 l_0^2 \times$$
$$\times \sum_{i=0}^{N} (K^2r^5)^i \frac{1}{[1-(\pi\lambda_0 d_0^2 l_0/4)(Kr^3)^i]^3} < \qquad (9)$$
$$< V\sigma\mu\pi^2\lambda_0^2 h_0 d_0^2 l_0^2 \sum_{i=0}^{\infty} (K^2r^5)^i \frac{1}{[1-(\pi\lambda_0 d_0^2 l_0/4)(Kr^3)^i]^3}.$$

Отметим, что постоянный множитель перед знаком суммы в неравенстве (9) имеет конечное значение. Знаменатель i-го члена ряда правой части неравенства (9) при $i \longrightarrow \infty$ стремится к единице тогда, когда

$$0 < Kr^3 < 1. \qquad (10)$$

Если выполняется условие (10), то i-й член ряда правой части неравенства (9) удовлетворяет условию

$$(K^2r^5)^i \le (K^2r^5)^i \frac{1}{[1-(\pi\lambda_0 d_0^2 l_0/4)(Kr^3)^i]^3} \le$$
$$\le (K^2r^5)^i \frac{1}{[1-\pi\lambda_0 d_0^2 l_0/4]^3}.$$

Таким образом, при выполнении условия (10) ряд правой части неравенства (9) мажорируется геометрической прогрессией

$$\sum_{i=0}^{\infty} (K^2r^5)^i \frac{1}{[1-\pi\lambda_0 d_0^2 l_0/4]^3}$$

и в свою очередь мажорирует геометрическую прогрессию

$$\sum_{i=0}^{\infty}(K^2r^5)^i$$

и, следовательно, сходится тогда и только тогда, когда

$$K^2r^5 < 1. \qquad (11)$$

Условие (11) при $K > 1$, $r > 0$ является достаточным для выполнения условия (10), причем $K > 1$, $r > 0$ по определению фильтровальной перегородки Q_N. Тем самым утверждение 3 доказано.

Замечание (об оценке гидравлического сопротивления). $\Delta P(Q_N)$ при $K^2r^5 < 1$ при любом конечном N удовлетворяет условию

$$\Delta P(Q_N) < \Delta P^*(Q_N) = $$
$$= V\sigma\mu\pi^2\lambda_0^2h_0d_0^2l_0^2\frac{(1-K^2r^5)^{-1}}{[1-\pi\lambda_0d_0^2l_0/4]^3}. \qquad (12)$$

Данная оценка непосредственно вытекает из неравенства (9) и известного выражения для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Замечание об оценке гидравлического сопротивления показывает, что гидравлическое сопротивление фильтровальной перегородки Q_N при $K^2r^5 < 1$ при любом конечном N не только конечно, но и меньше любой заранее заданной величины $\Delta P^*(Q_N)$.

Из утверждения 3 вытекает эквивалентное ему утверждение.

Утверждение 4. Фильтровальная перегородка Q_N при $N \longrightarrow \infty$ имеет конечное гидравлическое сопротивление тогда и только тогда, когда $D[\theta F(Q_N)] < 5/2$.

Доказательство. Неравенство $K^2r^5 < 1$ эквивалентно неравенству $2\ln K + 5\ln r < 0$. Учитывая, что $\ln K > 0$, а $\ln r < 0$, очевидно, $D[\theta F(Q_N)] = -\ln K/\ln r < 5/2$. Следовательно, утверждение 4 эквивалентно утверждению 3 и это доказывает его справедливость.

Таким образом, во-первых, в рассматриваемом классе фильтровальных перегородок существуют асимптотически абсолютные перегородки, фрактальная размерность поверхности их волокон больше двух; во-вторых, в рассматриваемом классе фильтровальных перегородок существуют асимптотически абсолютные перегородки с конечным гидравлическим сопротивлением, фрактальная размерность поверхности их волокон меньше 5/2. Следовательно, волокнистые фильтровальные перегородки с фрактальной структурой могут представлять значительный интерес, особенно в том случае, когда фрактальная размерность поверхности их волокон лежит в открытом интервале (2, 5/2).

Однако необходимо отличать теоретическую возможность построения фильтровальных перегородок со сколь угодно высокими показателями, доказанную в настоящей работе, от практической (технологической) возможности производства таких перегородок. Конечно, обеспечить на практике перегородки Q_N с $N \longrightarrow \infty$ невозможно. Но полученные результаты показывают путь, следуя которому можно значительно повысить эксплуатационные показатели реальных перегородок. Этот путь – создание фильтровальных перегородок Q_N с конечным числом N, представляющих собой так называемые предфракталы. При этом сочетается высокая грязеемкость (за счет предварительной очистки фильтруемой среды во входных слоях перегородки) с высокой эффективностью, определяемой выходными слоями.

Очевидно, на каждом конкретном этапе развития технологии производства волокон существуют определенные наименьшие значения d_i и l_i, которые и определяют предел, до которого можно повысить коэффициент отфильтровывания при сохранении малого гидравлического сопротивления. Дальнейшее повышение коэффициента отфильтровывания возможно только при увеличении гидравлического сопротивления. Это показывает, что оптимальные параметры структуры фильтровальных перегородок находятся на границе области практически осуществимых значений. Данный вывод согласуется с идеями, ранее развитыми в работах [8, 9], где показано, что эффективность фильтра увеличивается с уменьшением радиуса волокон.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере (проект № 2358) и Научно-методического центра по инновационной деятельности высшей школы при Тверском государственном университете (договор 1/99–3).

ОБОЗНАЧЕНИЯ

d – диаметр волокна;

h – толщина волокна;

K – коэффициент кратности;

l – длина волокна;

N – число слоев, составляющих фильтровальную перегородку;

ΔP – гидравлическое сопротивление;

ΔP^* – верхняя оценка гидравлического сопротивления;

S – площадь поверхности волокна;

s – линейное расстояние между волокнами;

s_i – удельная поверхность волокна в i-м слое;

V – линейная скорость фильтруемой среды;

x_{min} – наименьший размер частицы загрязнений;

ε – относительная пористость;

μ – коэффициент динамической вязкости фильтруемой среды;

θ – граница;

Φ – коэффициент отфильтровывания.

ИНДЕКСЫ

$i = 0, 1, 2, \ldots, N$ – номер слоя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чаусов Ф.Ф., Германов Ю.Н.* Производство фильтров осаждением релаксирующих волокностно-пленочных композиций // Хим. пром-сть. 1996. № 5. С. 38.
2. *Чаусов Ф.Ф.* Фильтр. А.с. РФ № 6148 // Б.и. 1998. № 3.
3. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991.
4. *Амбарцумян Р.В., Мекке Й., Штойян Д.* Введение в стохастическую геометрию. М.: Наука, 1989.
5. ГОСТ 26070–83. Фильтры и сепараторы для жидкостей. Термины и определения. М.: Изд-во стандартов, 1997.
6. *Иванова В.С., Баланкин А.С., Бунин И.Ж., Оксогоев А.А.* Синергетика и фракталы в материаловедении. М.: Наука, 1994.
7. *Жужиков В.А.* Фильтрование. Теория и практика разделения суспензий. М.: Химия, 1968.
8. *Стечкина И.Б., Кирш А.А.* К вопросу о выборе параметров фильтрующего материала для тонкой очистки газов // Теор. основы хим. технол. 1981. Т. 15. № 1. С. 79.
9. *Огородников Б.И., Скитович В.И., Хабаров В.И.* Фильтр для очистки аэрозолей. А. с. СССР № 552099 // Б. и. 1977. № 12.